

ĐÁP ÁN

Câu 1. a) Điều kiện:

$$x \geq 0, x \neq \frac{4}{3}.$$

Đặt $\sqrt{3x} = a$. Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{2a^2 + 4}{a^3 - 8} - \frac{a}{a^2 + 2a + 4} \right) \left(\frac{1 + a^3}{1 + a} - a \right) \\ &= \frac{2a^2 + 4 - a(a - 2)}{(a - 2)(a^2 + 2a + 4)} \cdot (1 - a + a^2 - a) \\ &= \frac{a^2 - 2a + 1}{a - 2} \end{aligned}$$

Thay $a = \sqrt{3x}$, ta có

$$P = \frac{3x - 2\sqrt{3x} + 1}{\sqrt{3x} - 2}$$

b) Ta có

$$P = \frac{3x - 3}{\sqrt{3x} - 2} - 2$$

Với $x = 1$, ta có $P = -2$ (thỏa mãn)

Xét $x \neq 1$: Do $3x - 3 \in \mathbb{Z}$, $3x - 3 \neq 0$ và $P \in \mathbb{Z}$ nên $\sqrt{3x} - 2 \in \mathbb{Z}$.

Ta có

$$P = \sqrt{3x} + \frac{1}{\sqrt{3x} - 2}$$

Do đó

$$P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (\sqrt{3x} - 2) \mid 1 \Leftrightarrow \sqrt{3x} - 2 = \pm 1 \Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = \frac{1}{3} \text{ (loại)}$$

Kết luận: $x \in \{1; 3\}$.

Câu 2. Trừ theo từng vế hai phương trình của hệ ta được

$$\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1} + 3(x - y) = 0$$

Nhân liên hợp ta được

$$(x - y) \left(\frac{x + y}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} + 3 \right) = 0.$$

Xét

$$T = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} + 3 = \frac{3\sqrt{x^2 + 1} + x + 3\sqrt{y^2 + 1} + y}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}}$$

Ta có:

$$3\sqrt{x^2 + 1} + x > 3|x| + x \geq 0, 3\sqrt{y^2 + 1} + y > 3|y| + y \geq 0.$$

Suy ra $T > 0$. Từ đó ta có $x = y$. Thay vào hệ ta có:

$$\sqrt{x^2 + 1} = x + 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 0$.

Câu 3 Ta có

$$A = n^2(n^4 - n^2 + 2n + 2)$$

Với $n = 0$, ta có $A = 0$ là số chính phương.

Với $n = 1$, ta có $A = 4$ là số chính phương.

Với $n = 2$, ta có $A = 72$ không là số chính phương.

Xét $n \geq 3$:

Vì A là số chính phương nên $n^4 - n^2 + 2n + 2$ là số chính phương. Đặt

$$n^4 - n^2 + 2n + 2 = a^2 (a \in \mathbb{N}, a \geq 2).$$

Ta có

$$n^2 - 2n - 2 = n(n - 2) - 2 \geq 3(3 - 2) - 2 > 0$$

Suy ra $a^2 < n^4$ hay $a < n^2$.

Mặt khác

$$a^2 - (n^2 - 1)^2 = n^2 + 2n + 1 > 0$$

Suy ra $a^2 > (n^2 - 1)^2$ hay $a > n^2 - 1$.

Do đó, $n^2 - 1 < a < n^2$. Điều này không xảy ra vì giữa hai số tự nhiên liên tiếp không còn số tự nhiên nào.

Kết luận: $n \in \{0; 1\}$

Câu 4

- a) Ta có MD là đường trung bình của tam giác CBH . Suy ra: $\widehat{CDM} = \widehat{CBA} = \widehat{CNM}$
 Vậy tứ giác $CMDN$ nội tiếp.

- b) Do tứ giác $CMDN$ nội tiếp nên
 $\widehat{NDC} = \widehat{NMC} = \widehat{AMH}$

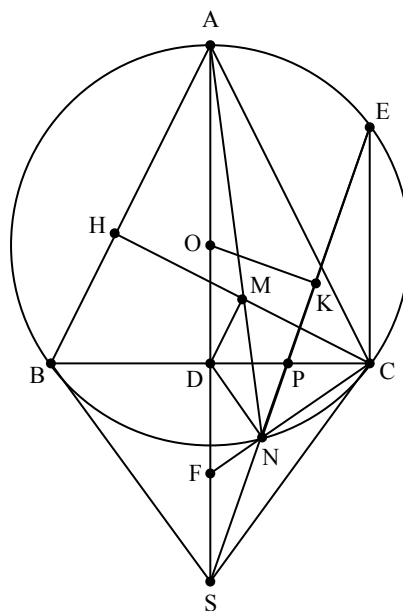
Suy ra

$$\widehat{SDN} = 90^\circ - \widehat{NDC} = 90^\circ - \widehat{AMH} = \widehat{BAN}$$

Do SB là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{BAN} = \widehat{SBN}$.

Suy ra: $\widehat{SDN} = \widehat{SBN}$

Do đó, tứ giác $SBDN$ nội tiếp. Suy ra



$$\widehat{DSN} = \widehat{DBN} = \widehat{NEC}$$

Vậy CE song song với SA .

c) Gọi F là giao điểm của CN với SD . Ta có:

$$\widehat{FSN} = \widehat{NEC} \text{ (so le)} = \widehat{NCS}.$$

Suy ra : $\Delta FNS \sim \Delta FSC \Rightarrow FS^2 = FN \cdot FC$.

Xét tam giác vuông DFC có DN là đường cao, ta có : $FD^2 = FN \cdot FC$.

Suy ra : $FD^2 = FS^2$ hay F là trung điểm của SD .

Câu 5. Xét các phần tử: $2^0, 2^1, \dots, 2^{10}$ của X . Vì có 5 màu nên trong 11 phần tử trên có ba phần tử cùng màu. Ba phần tử đó thỏa mãn yêu cầu bài toán.